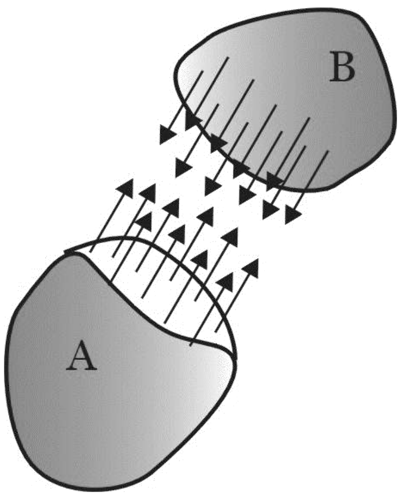
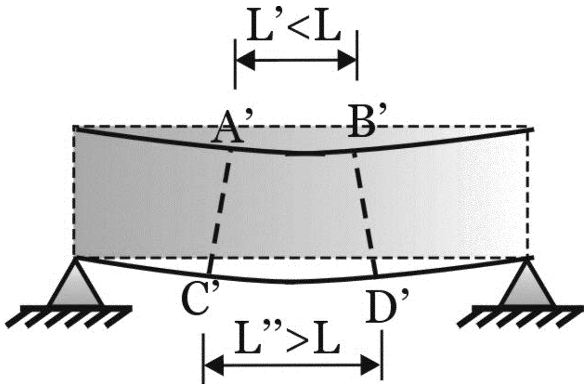
APUNTES DE MECÁNICA DEL SÓLIDO DEFORMABLE





ESTEFANÍA PEÑA BAQUEDANO

Área de Mecánica de Medios Continuos y Tª de Estructuras

Diseño e impresión.-

[stylo@stylodigital.com]

Autora: Estefanía Peña Baquedano

impreso en España / printed in Spain

Índice general

1

Introducción a la Mecánica del Sólido Deformable

Antes de introducir la disciplina *Teoría de la Elasticidad y Resistencia de Materiales*, se va a establecer una perspectiva general, encuadrándola en el ámbito de la Ciencia y de la Técnica. Desde un punto de vista científico esta disciplina se puede considerar como parte de la Física, es decir, como ciencia explicativa del comportamiento de los sistemas materiales, incluyéndose en la Mecánica, rama de la Física que estudia los fenómenos de equilibrio y movimiento de los cuerpos.

Para desarrollar la Mecánica es necesario postular un modelo teórico acerca de la estructura de la materia, adaptando las características del modelo al problema que se trata de estudiar. Así, el modelo de punto material, en el que se concentra la materia en un punto geométrico, es suficientemente aproximado para el estudio de cuerpos celestes o de moléculas de un gas, dado que las trayectorias por ellos descritas son muy grandes en comparación con sus propias dimensiones.

En los cuerpos materiales, cuyas dimensiones no permiten que sea válido este modelo, el conocimiento actual de la estructura interna de la materia permite considerarla como un sistema de un número muy elevado (cuasi-infinito) de puntos materiales sometidos a complejas fuerzas de interacción.

En el estudio de los cuerpos materiales no asimilables al modelo de punto material se distinguen dos vías de actuación:

- *Modelo de Sólido Rígido*: distribución continua de materia con invariabilidad de las distancias relativas entre los puntos. Se adoptará cuando las modificaciones de forma del sólido por efecto de las acciones exteriores sean despreciables respecto al movimiento de su conjunto.
- *Modelo Continuo o de Sólido Deformable*: distribución continua de materia con variación continua de las distancias relativas entre sus puntos. Se adoptará cuando las modificaciones de forma del sólido producidas por las acciones exteriores no puedan ser ignoradas.

El proceso de diseño, una vez adoptada la forma estructural que mejor se ajusta a la finalidad deseada, establecidas las acciones que se deben trasmitir y elegido el material que resulte más adecuado, exige unos objetivos de seguridad y funcionalidad. Para ello, es preciso determinar ciertas magnitudes asociadas al fenómeno resistente y compararlas con determinados valores límites. La determinación de dichas magnitudes es competencia de la Mecánica de Sólidos deformables, definiendo ésta como una rama de la Mecánica de Medios Continuos, Figura 1.1.

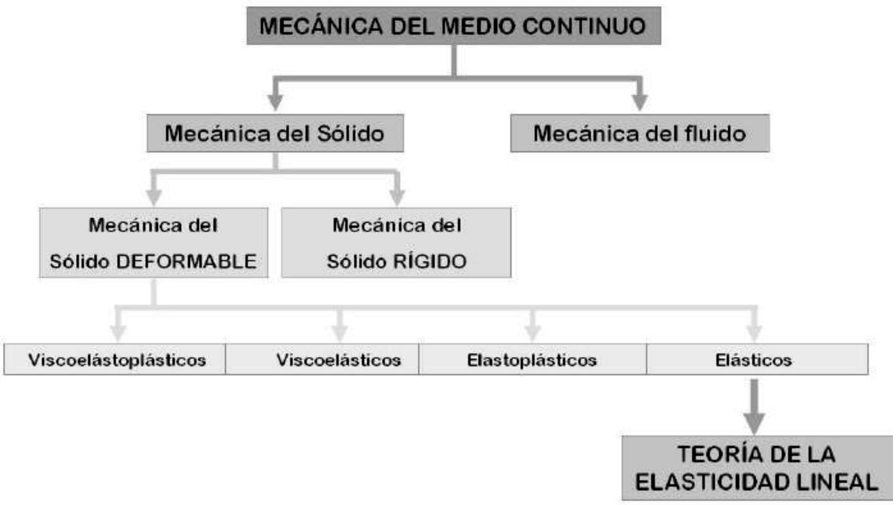


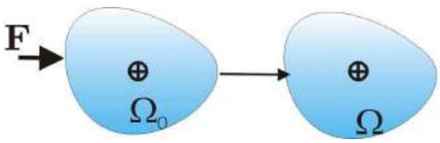
Figura 1.1 Mecánica del Medio Continuo

La *Mecánica de los Medios Continuos* admite una clasificación, relativa al estado de agregación de la materia, en otras dos: *Mecánica de Fluidos*, para gases y líquidos y *Mecánica de Sólidos Deformables* para sólidos. Al considerar el medio continuo se ignora el comportamiento microscópico frente al macroscópico, hipótesis justificada por las pequeñas dimensiones de los granos frente a las dimensiones significativas de la estructura. Esto permite trabajar en un espacio continuo en lugar de discreto, lo que permite definir el problema mediante funciones continuas que hacen posible el empleo de herramientas del análisis diferencial. No se considera la aparición de orificios o defectos microscópicos, si bien es posible redefinir la geometría exterior del sólido considerando la aparición de grietas u orificios macroscópicos.

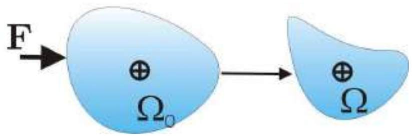
Existe una gran variedad de materiales, y con ello de modelos de comportamiento, dependiendo de la relación entre fuerzas y desplazamientos. El material más simple, pero no por ello menos importante, es el denominado Material Elástico Lineal. Esta relación de comportamiento da lugar a la Teoría de la Elasticidad Lineal, disciplina objeto de este curso, Figura 1.1.

1.1. El sólido rígido y el sólido deformable

Un sólido puede definirse mediante un sistema de partículas haciendo que el número de éstas tienda a infinito. Si la distancia relativa entre las partículas permanece constante independientemente de las fuerzas que se ejercen sobre él se le considera *sólido rígido*, Figura 1.2.a. Mientras que si la distancia puede variar (deformarse) como resultado de las fuerzas exteriores o del propio movimiento nos encontramos con un *sólido deformable*, Figura 1.2.b.



(a) Sólido Rígido



(b) Sólido Deformable

Figura 1.2 Concepto de sólido rígido y sólido deformable

Las ecuaciones fundamentales de la Mecánica del Sólido Rígido se basan en el establecimiento de las ecuaciones de Euler. Para ello existen tres opciones:

- Definir cinemática y establecer las relaciones entre las derivadas temporales de los parámetros (GDL) y las fuerzas y momentos que sobre él actúan.
- Establecer relaciones energéticas en base a los principios de conservación bien conocidos (funcionales Lagrangiano o Hamiltoniano), para ello se requiere que las fuerzas exteriores sean conservativas (deriven de un potencial a través de las derivadas de los GDL). A través del planteamiento de las ecuaciones de conservación de tales funcionales se pueden obtener las ecuaciones de Euler.
- Mediante la aplicación del Teorema de los Trabajos Virtuales de un sistema de fuerzas en equilibrio (incluyendo las fuerzas y momentos de inercia).

La cinemática de un sólido rígido se puede describir completamente mediante los desplazamientos de un punto y el giro alrededor de los tres ejes que pasan por él, es decir 6 GDL. Para un sólido deformable es necesario definir o situar los infinitos puntos que lo componen, es decir, tenemos ∞ GDL (parametrización del movimiento del sólido en función de un nuevo conjunto de grados de libertad que permitan caracterizar de forma completa la cinemática en cada instante). La diferencia con el sólido rígido es pues importante, pues la cinemática queda definida por una función espacio-temporal vectorial completa de (x,y,z,t) que define la posición en cada instante t de cada punto del sólido (x,y,z) o, equivalentemente por un número infinito de grados de libertad, en lugar de por un sistema finito de parámetros funciones sólo del tiempo. A esta función la denominaremos función movimiento y a su particularización en un instante determinado configuración en el instante t. Por tanto se ha pasado de un sistema finito de parámetros funciones sólo del tiempo (posición de un punto fijo, habitualmente el del centro de gravedad, y giros respecto de tres ejes en el caso del sólido rígido tridimensional) en un sólido rígido, a una función espacio-temporal completa en un sólido deformable.

Las ecuaciones de Euler para el sólido deformable (principios de variación de la cantidad de movimiento y del momento cinético) se establecen de forma análoga al sólido rígido, pero teniendo en cuenta las consideraciones cinemáticas anteriores, conduciendo a un planteamiento integral:

$$\begin{aligned} VCM &: \frac{d}{dt}\int_{\Omega} \rho(x,y,z)\ \mathbf{v}(x,y,z)d\Omega = \mathbf{P}(x,y,z) \\ VMC &: \frac{d}{dt}\int_{\Omega} \rho(x,y,z)\ \mathbf{r}(x,y,z)\wedge \mathbf{v}(x,y,z)d\Omega = \mathbf{M}(x,y,z) \end{aligned} \tag{1.1}$$

con $\mathbf{v}$ la velocidad del movimiento, ρ la densidad y $\mathbf{r}$ el radio-vector que une cada punto del sólido con aquel respecto del cual se toma el momento cinético. Con ello, se obtiene un sistema de 6 ecuaciones integrales en cada instante que son insuficientes para resolver el problema de determinación de las 3 componentes del movimiento. Por tanto, el equilibrio externo es insuficiente para determinar la configuración de un sólido deformable (todas las magnitudes físicas varían con el punto en el que se evalúan).

Es necesario, por tanto, establecer el equilibro interno entre diferentes partes del cuerpo que nos equilibre el sólido. En definitiva, es necesario introducir ecuaciones o conceptos adicionales.

- El concepto de tensión como fuerza interna por unidad de superficie, siendo posible demostrar que la tensión en un punto queda definida por 9 funciones (que finalmente se reducen a 6, por la simetría obtenida al plantear la ecuación de variación de momento cinético a nivel diferencial).
- El concepto de deformación como infinitesimal de los desplazamientos de los puntos del sólido con respecto a la posición que ocupan del mismo y que queda definido por simetría por 6 componentes.

El planteamiento del equilibrio a nivel diferencial en cada instante permite conseguir 3 ecuaciones diferenciales en derivadas parciales, correspondientes a la variación de la cantidad de movimiento (ya que las correspondientes a la variación del momento cinético se han traducido en reducir a 6 el número de funciones de punto referentes a las tensiones) que nos permitirían conocer tres funciones y 6 ecuaciones que relacionan los desplazamientos con las deformaciones, sin embargo, al introducir el concepto de tensión y de deformación, hemos pasado de tener 3 incógnitas (asociadas a la posición de cada punto) a 15 (12 más al incluir las 6 tensiones y 6 deformaciones).

Necesitamos, por tanto, plantear 6 ecuaciones adicionales que nos permitan resolver el problema. Estas nuevas ecuaciones las obtenemos a partir de las ecuaciones de comportamiento (distintos materiales sometidos a la misma carga se mueven y se deforman de manera distinta). Estas relaciones se establecen, usualmente, entre tensiones y deformaciones y pueden ser de forma general, no lineales y dependientes de la posición y el tiempo.

Además, el equilibrio es necesario plantearlo en el instante y la geometría actual (tras la deformación) que es, en general, desconocida (dependiente de las incógnitas), lo que hace que el problema sea no lineal. Ésto, unido a las posibles no linealidades asociadas al material, hacen que el problema sea muy complejo. Sin embargo, en algunos casos, a partir de hipótesis adicionales, es posible simplificar el problema planteado llegando a lo que se conoce como *Teoría de la Elasticidad Lineal.*

1.2. Hipótesis básicas de la mecánica del sólido deformable

En este apartado vamos a presentar las hipótesis básicas de la mecánica de medios continuos. Estas hipótesis son generales y no particularizan ningún tipo de material ni modo de deformación o desplazamiento, siendo a partir de ahora, postulados iniciales de trabajo.

- Trabajamos en el contexto de la Mecánica de Newton, es decir, no se consideran efectos relativistas.
- Trabajamos con medios continuos, sin discontinuidades a nivel microscópico. Por tanto, ignoramos la existencia de estructuras a nivel microscópico como moléculas, atómos etc. Esta hipótesis se justifica por las pequeñas dimensiones de las partículas en comparación con las dimensiones de los sólidos que vamos a estudiar. Nos permite trabajar con funciones continuas y por tanto con herramientas del análisis diferencial.
- Se cumplen las leyes básicas e la Termodinámica, es decir, conservación de la energía y generación de entropía. Corresponde a los axiomas básicos de cualquier sistema termodinámico, al menos en condiciones no extremas, y por tanto se tomará como axioma inicial.

1.3. Teoría de la elasticidad lineal

Como se ha indicado anteriormente, las hipótesis generales descritas en la sección 1.2, son de carácter general y no particularizan ningún tipo de material ni movimiento. Es el momento ahora de definir el tipo de material con el que trabajamos (definir relación de comportamiento) y el tipo de movimiento y deformación a la que van a estar sometidos los sólidos que vamos a estudiar. Estas suposiciones nos definirán las hipótesis esenciales de la Teoría de la Elasticidad Lineal.

- *Pequeños desplazamientos.* Los cambios en la configuración son tan pequeños que las ecuaciones de equilibrio pueden plantearse en la configuración indeformada sin cometer error apreciable.
- *Pequeñas deformaciones.* Las derivadas de los desplazamientos son despreciables frente a la unidad y ello implica que el producto de las derivadas frente a las propias derivadas también es despreciable.

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}} \ll 1 \quad \Longrightarrow \quad \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}}\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}} \ll \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}} \tag{1.2}$$

- *Material elástico lineal.* Estos materiales se caracterizan por que una vez suprimida la acción que actuaba sobre el sólido, éste vuelve a su posición original sin experimentar deformaciones permanentes y, además, existe una relación lineal entre las tensiones y las deformaciones e independiente del tiempo, de la historia previa y de la velocidad de deformación. Aunque ningún material es completamente elástico lineal, un buen número de materiales de gran interés ingenieril (especialmente metales) presentan este comportamiento.
- *Principio de Saint-Venant.* A suficiente distancia del punto de aplicación de las cargas, los efectos de las mismas no dependen de la distribución sino de la resultante de ésta, Figura 1.3.

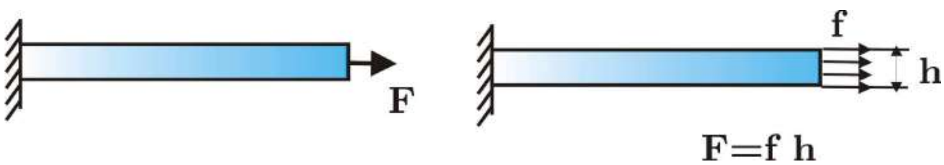


Figura 1.3 Principio de Saint-Venant

Además de estas hipótesis básicas se suelen utilizar las siguientes que, aunque no son necesarias, simplifican la formulación y corresponden a casos muy habituales en la práctica ingenieril.

- *Material homogéneo.* La relación de comportamiento es la misma para todos los puntos (los parámetros son independientes de las coordenadas). Aunque ningún material es completamente homogéneo, una gran parte de materiales presenta un comportamiento equivalente, por ejemplo los metales.

- *Material isótropo.* La relación de comportamiento es independiente de la dirección considerada.
- *Problema estático.* Despreciamos los efectos inerciales (las cargas se aplican lentamente, no dependen del tiempo y el sólido tiene impedido el movimiento como SR).
- *Proceso isotermo.* No existe cambio de temperatura o éste es despreciable.

Un resumen de las hipótesis planteadas y de la teoría en la que derivan puede verse en la Figura 1.4.

Figura 1.4 Principio de Saint-Venant

Las hipótesis anteriores de la Teoría de Elasticidad Lineal dan lugar a unas consecuencias de gran interés, que entre las más importantes se destacan:

- *Principio de superposición.* Implica una dependencia lineal entre la respuesta y las cargas actuantes y es posible obtener la respuesta ante distintas cargas como suma de las respuestas ante cada una de ellas. Este principio, que es consecuencia directa de la linealidad de las ecuaciones, permite resolver problemas con cargas muy complejas mediante descomposición en problemas más simples sin más que sumar los efectos correspondientes, Figura 1.5.
- *Existencia de la función densidad de energía.* Para el material elástico lineal existe un funcional definido positivo denominado densidad de energía de deformación, función de las deformaciones y de la temperatura, tal que las tensiones se obtienen

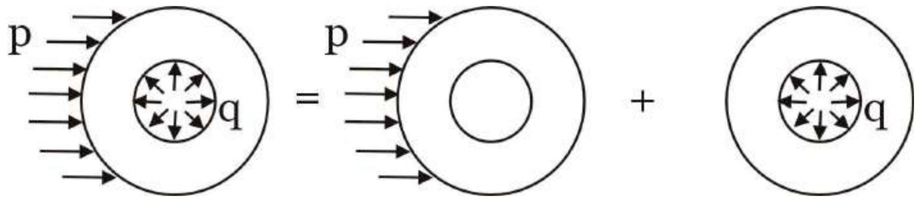


Figura 1.5 Principio de superposición

como la derivada de este funcional respecto de las deformaciones (1.3).

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \varepsilon_{ij}} \tag{1.3}$$

- *Existencia de la energía potencial.* La existencia de la energía potencial que junto con la cinética dan lugar a la energía total del sistema que se conserva en el caso isotermo, lo que permite definir una estructura hamiltoniana y unos principios variacionales.
- *Teorema de Reciprocidad de Maxwell.* Para un sólido sometido a dos estados de carga, Figura 1.6, se cumple que el trabajo
    - Realizado por el sistema de cargas 1 sobre los desplazamientos producidos por el sistema 2 es IGUAL al
    - Realizado por el sistema de cargas 2 sobre los desplazamientos producidos por el sistema 1

$$W(\mathbf{F}^{I}, \mathbf{u}^{II}) = W(\mathbf{F}^{II}, \mathbf{u}^{I}) \tag{1.4}$$

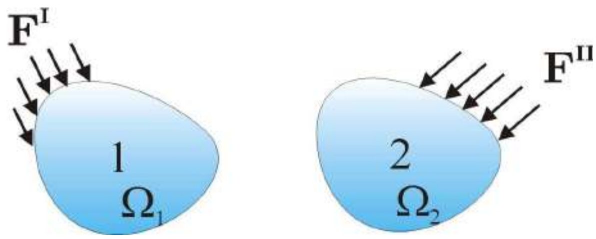


Figura 1.6 Teorema de Reciprocidad de Maxwell

- *Unicidad de solución.* La solución del problema elástico existe y además es única.

Todas estas hipótesis, postulados y consecuencias, nos definen el contexto de la Teoría de la Elasticidad Lineal donde vamos a trabajar a partir de ahora en las lecciones siguientes, siendo necesario definir cuáles serán las variables básicas del problema elástico, las ecuaciones que las gobiernan y los métodos de resolver dichas ecuaciones. Todo ello es lo que vamos a estudiar en las lecciones siguientes.