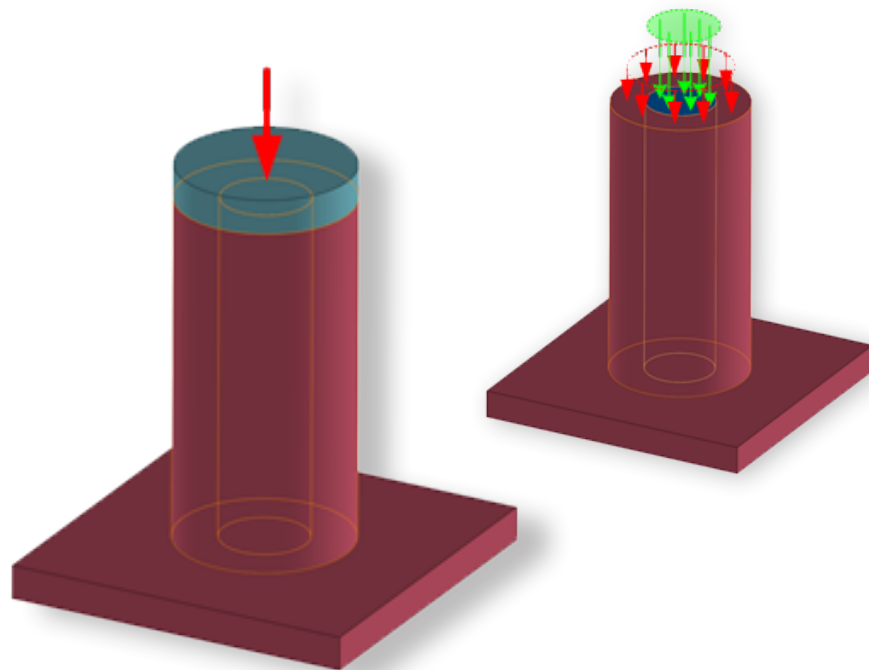


# RESISTENCIA DE MATERIALES PROBLEMAS RESUELTOS

■ Mohamed Hamdy Doweidar



Escuela de  
Ingeniería y Arquitectura  
Universidad Zaragoza



Universidad  
Zaragoza

---

DISEÑO PORTADA

E IMPRESIÓN.-



[ [stylo@stylodigital.com](mailto:stylo@stylodigital.com) ]

IMPRESO EN ESPAÑA / PRINTED IN SPAIN

Depósito Legal: Z-1541-2017

ISBN: 978-84-16825-28-8

---

**Reservados todos los derechos.** El contenido de esta obra está protegido por la ley, que establece penas de prisión y/o multas, además de las correspondientes indemnizaciones por daños y perjuicios, para quienes reprodujeren, plagiaren, distribuyeren o comunicasen públicamente, en todo o en parte, una obra literaria, artística o científica, o su transformación, interpretación o ejecución artística fijada en cualquier medio, sin la preceptiva autorización. Ninguna parte de esta publicación, incluido el diseño de la cubierta, puede ser reproducida, almacenada o transmitida de ninguna forma, ni por ningún medio, sea éste electrónico, electro-óptico, grabación, fotocopia o cualquier otro, sin la previa autorización por parte del autor.

*¡A mi querida familia!*

## Tabla de contenido

|           |  |           |
|-----------|--|-----------|
| <b>1.</b> | <b>INTRODUCCIÓN .....</b>                            | <b>1</b>  |
| 1.1.      | FÓRMULAS .....                                       | 1         |
| 1.2.      | PROBLEMAS RESUELTOS .....                            | 2         |
|           | PROBLEMA 1.2.1                                       | 2         |
|           | PROBLEMA 1.2.2                                       | 4         |
|           | PROBLEMA 1.2.4                                       | 8         |
| <b>2.</b> | <b>BARRAS SOMETIDAS A TRACCIÓN Y COMPRESIÓN.....</b> | <b>13</b> |
| 2.1.      | FÓRMULAS .....                                       | 13        |
| 2.2.      | PROBLEMAS RESUELTOS .....                            | 14        |
|           | PROBLEMA 2.2.1                                       | 14        |
|           | PROBLEMA 2.2.2                                       | 15        |
|           | PROBLEMA 2.2.3                                       | 16        |
|           | PROBLEMA 2.2.4                                       | 17        |
|           | PROBLEMA 2.2.5                                       | 19        |
|           | PROBLEMA 2.2.6                                       | 22        |
|           | PROBLEMA 2.2.8                                       | 28        |
|           | PROBLEMA 2.2.9                                       | 30        |
|           | PROBLEMA 2.2.10                                      | 33        |
|           | PROBLEMA 2.2.11                                      | 35        |
|           | PROBLEMA 2.2.12                                      | 37        |
|           | PROBLEMA 2.2.13                                      | 39        |
|           | PROBLEMA 2.2.16                                      | 44        |
|           | PROBLEMA 2.2.17                                      | 47        |
| <b>3.</b> | <b>BARRAS SOMETIDAS A TORSIÓN.....</b>               | <b>51</b> |
| 3.1.      | FÓRMULAS .....                                       | 51        |
| 3.2.      | PROBLEMAS RESUELTOS .....                            | 52        |
|           | PROBLEMA 3.2.1                                       | 52        |
|           | PROBLEMA 3.2.2                                       | 53        |
|           | PROBLEMA 3.2.4                                       | 57        |
|           | PROBLEMA 3.2.5                                       | 59        |
|           | PROBLEMA 3.2.6                                       | 62        |
|           | PROBLEMA 3.2.7                                       | 64        |
|           | PROBLEMA 3.2.9                                       | 69        |
|           | PROBLEMA 3.2.10                                      | 72        |
|           | PROBLEMA 3.2.11                                      | 76        |
| <b>4.</b> | <b>BARRAS SOMETIDAS A FLEXIÓN.....</b>               | <b>81</b> |
| 4.1.      | FÓRMULAS .....                                       | 81        |
| 4.2.      | PROBLEMAS RESUELTOS .....                            | 83        |
|           | PROBLEMA 4.2.1                                       | 83        |
|           | PROBLEMA 4.2.2                                       | 86        |
|           | PROBLEMA 4.2.3                                       | 87        |
|           | PROBLEMA 4.2.5                                       | 91        |
|           | PROBLEMA 4.2.6                                       | 93        |
|           | PROBLEMA 4.2.7                                       | 95        |
|           | PROBLEMA 4.2.8                                       | 96        |

---

|   |            |
|---|------------|
| PROBLEMA 4.2.9                                    | 98         |
| PROBLEMA 4.2.10                                   | 100        |
| PROBLEMA 4.2.11                                   | 102        |
| PROBLEMA 4.2.12                                   | 104        |
| PROBLEMA 4.2.13                                   | 106        |
| PROBLEMA 4.2.15                                   | 110        |
| PROBLEMA 4.2.16                                   | 112        |
| PROBLEMA 4.2.17                                   | 115        |
| PROBLEMA 4.2.18                                   | 117        |
| PROBLEMA 4.2.19                                   | 119        |
| PROBLEMA 4.2.20                                   | 123        |
| PROBLEMA 4.2.21                                   | 125        |
| PROBLEMA 4.2.22                                   | 130        |
| PROBLEMA 4.2.23                                   | 132        |
| PROBLEMA 4.2.24                                   | 135        |
| PROBLEMA 4.2.25                                   | 139        |
| PROBLEMA 4.2.26                                   | 142        |
| PROBLEMA 4.2.28                                   | 146        |
| PROBLEMA 4.2.29                                   | 150        |
| PROBLEMA 4.2.30                                   | 154        |
| PROBLEMA 4.2.31                                   | 158        |
| PROBLEMA 4.2.32                                   | 164        |
| PROBLEMA 4.2.33                                   | 166        |
| PROBLEMA 4.2.34                                   | 172        |
| PROBLEMA 4.2.35                                   | 175        |
| PROBLEMA 4.2.36                                   | 178        |
| PROBLEMA 4.2.37                                   | 184        |
| PROBLEMA 4.2.38                                   | 188        |
| PROBLEMA 4.2.39                                   | 192        |
| PROBLEMA 4.2.40                                   | 197        |
| PROBLEMA 4.2.41                                   | 200        |
| PROBLEMA 4.2.42                                   | 205        |
| PROBLEMA 4.2.43                                   | 209        |
| PROBLEMA 4.2.44                                   | 215        |
| PROBLEMA 4.2.45                                   | 220        |
| <b>5. ESTABILIDAD DE BARRAS COMPRIMIDAS .....</b> | <b>227</b> |
| 5.1. FÓRMULAS .....                               | 227        |
| 5.2. PROBLEMAS RESUELTOS .....                    | 228        |
| PROBLEMA 5.2.1                                    | 228        |
| PROBLEMA 5.2.2                                    | 230        |
| PROBLEMA 5.2.4                                    | 238        |
| PROBLEMA 5.2.5                                    | 240        |
| PROBLEMA 5.2.6                                    | 242        |
| <b>6. ELASTICIDAD PLANA.....</b>                  | <b>245</b> |
| 6.1. FÓRMULAS .....                               | 245        |
| 6.2. PROBLEMAS RESUELTOS .....                    | 247        |
| PROBLEMA 6.2.1                                    | 247        |
| PROBLEMA 6.2.2                                    | 249        |
| PROBLEMA 6.2.4                                    | 252        |

---

---

|                 |     |
|-----------------|-----|
| PROBLEMA 6.2.6  | 255 |
| PROBLEMA 6.2.7  | 258 |
| PROBLEMA 6.2.9  | 261 |
| PROBLEMA 6.2.10 | 263 |
| PROBLEMA 6.2.11 | 267 |
| PROBLEMA 6.2.12 | 271 |

# 1. INTRODUCCIÓN

## 1.1. FÓRMULAS

Tensión normal: 
$$\sigma = \frac{F_{\text{normal}}}{\text{Área}}$$

Tensión tangencial: 
$$\tau = \frac{F_{\text{tangencial}}}{\text{Área}}$$

Deformación: 
$$\varepsilon = \frac{\Delta L}{L}$$

Ley de Hooke: 
$$E = \frac{\sigma_x}{\varepsilon_x}$$

Tensor de tensiones: 
$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix}$$

Tensor de deformaciones: 
$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{zx} \\ \varepsilon_{xy} & \varepsilon_y & \varepsilon_{zy} \\ \varepsilon_{xz} & \varepsilon_{yz} & \varepsilon_z \end{bmatrix}$$

Coefficiente de Poisson: 
$$\nu = -\frac{\varepsilon_y}{\varepsilon_x} = -\frac{\varepsilon_z}{\varepsilon_x}$$

Módulo de cizalladura: 
$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

Tensión admisible: 
$$\sigma_{adm} = \frac{\sigma_{fallo}}{\text{Coeficiente de Seguridad de la Tensión (C.S.T)}}$$

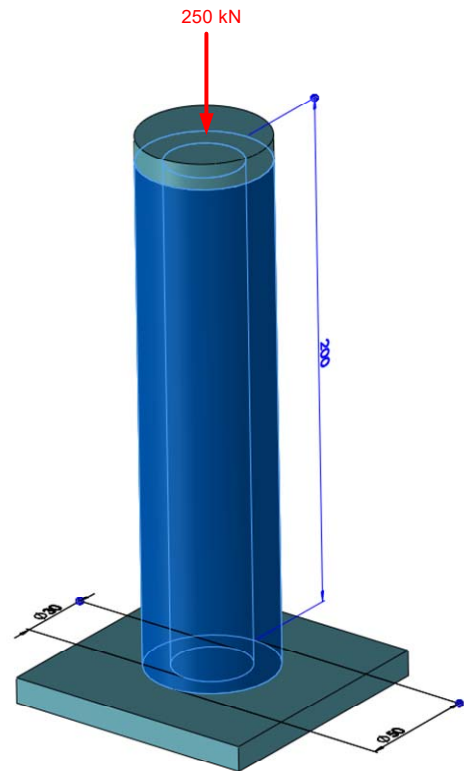
Factor de seguridad: 
$$F.S. = \frac{\sigma_{adm}}{\sigma_{diseño}}$$

## 1.2. PROBLEMAS RESUELTOS

## PROBLEMA 1.2.1

Un tubo circular hueco de aluminio, soporta una carga en compresión de 250 kN que está actuando en el centro de una placa rígida para garantizar la distribución uniforme de la fuerza sobre la sección del tubo. Los diámetros interior y exterior del tubo son  $d_1 = 30$  mm y  $d_2 = 50$  mm, respectivamente, y su longitud es de 200 mm. El valor medido del aumento en el diámetro externo del tubo debido a la carga es de 0,047 mm. Desprecie el peso del tubo y supone que éste no pandea. Teniendo en cuenta que el módulo de elasticidad del aluminio  $E = 70$  GPa, determine:

- el acortamiento de la longitud del tubo
- el incremento del diámetro interno
- el incremento del espesor de la pared
- el coeficiente de Poisson para el aluminio



## SOLUCIÓN

Área de la sección:

$$A = \frac{\pi}{4} (d_2^2 - d_1^2) = \frac{\pi}{4} (50^2 - 30^2) = 1256,64 \text{ mm}^2$$

Espesor de la pared:

$$t = \frac{d_2 - d_1}{2} = \frac{50 - 30}{2} = 10 \text{ mm}$$

Tensión de compresión:

$$\sigma = \frac{P}{A} = \frac{250000}{1256,64} = 198,944 \text{ N/mm}^2$$

Deformación lineal:

$$\varepsilon_L = \frac{\sigma}{E} = \frac{198,944}{70000} = 0,002842$$



El acortamiento de la longitud del tubo:

$$\Delta L = \varepsilon_L L = 0,002842 \cdot 200 = 0,5684 \text{ mm}$$

La deformación lateral del tubo:

$$\varepsilon_R = \frac{\Delta d_2}{d_2} = \frac{0,047}{50} = 0,00094$$

El incremento del diámetro interno:

$$\Delta d_1 = \varepsilon_R d_1 = 0,00094 \cdot 30 = 0,0282 \text{ mm}$$

El incremento del espesor de la pared:

$$\Delta t = \varepsilon_R t = 0,00094 \cdot 10 = 0,0094 \text{ mm}$$

El coeficiente de Poisson para el aluminio:

$$\nu = \frac{\varepsilon_R}{\varepsilon_L} = \frac{0,00094}{0,002842} = 0,3307$$

**PROBLEMA 1.2.2**

Dos cables,  $AB$  y  $BC$ , de acero, soportan una carga  $P=100$  N. El cable  $AB$  tiene un ángulo  $\varphi_{AB} = 44^\circ$  con respecto a la horizontal, mientras que el cable  $BC$  mantiene un ángulo  $\varphi_{BC} = 52^\circ$ . Los dos cables tienen un diámetro  $d = 1$  mm. Determinar las tensiones de tracción  $\sigma_{AB}$  y  $\sigma_{BC}$  en ambos cables.

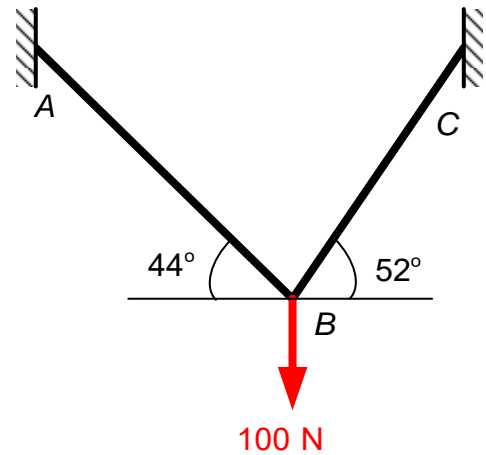
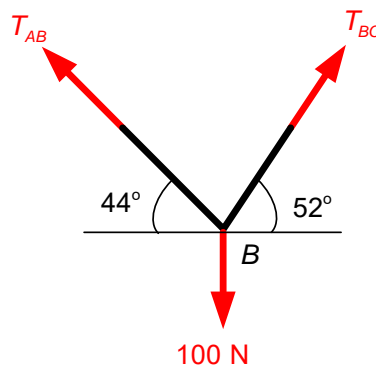
**SOLUCIÓN**

Diagrama del sólido libre del punto  $B$ :



Ecuaciones de equilibrio:

$$\sum F_x = 0$$

$$\rightarrow -T_{AB} \cos \varphi_{AB} + T_{BC} \cos \varphi_{BC} = 0$$

$$\rightarrow -T_{AB} \cos(44) + T_{BC} \cos(52) = 0 \quad (1)$$

$$\sum F_y = 0$$

$$\rightarrow T_{AB} \sin \varphi_{AB} + T_{BC} \sin \varphi_{BC} - P = 0$$

$$\rightarrow T_{AB} \sin(44) + T_{BC} \sin(52) - 100 = 0 \quad (2)$$

resolviendo (1) y (2)  $\rightarrow T_{AB} = 61,9053 \text{ N}$

$\rightarrow T_{BC} = 72,3302 \text{ N}$

Área de la sección:

$$A = \frac{\pi d^2}{4} = \frac{\pi 1^2}{4} = 0,7854 \text{ mm}^2$$

Tensión de tracción:

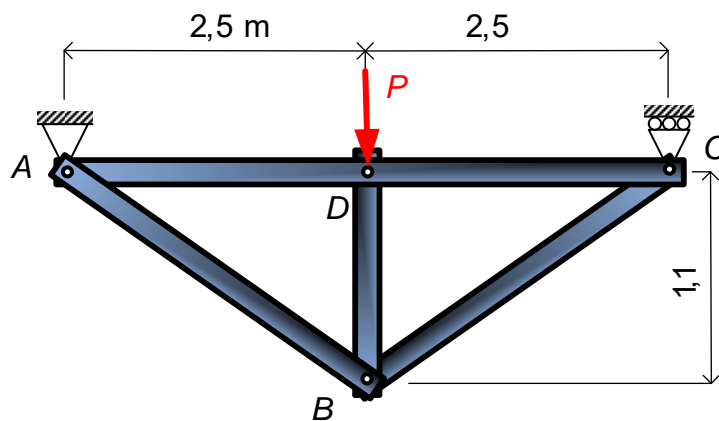
$$\sigma_{AB} = \frac{T_{AB}}{A} = \frac{61,9053}{0,7854} = 78,8202 \text{ N/mm}^2$$

$$\sigma_{BC} = \frac{T_{BC}}{A} = \frac{72,3302}{0,7854} = 92,0937 \text{ N/mm}^2$$

## PROBLEMA 1.2.3

La estructura articulada de la figura tiene un vano  $L = 5$  m y una altura  $H = 1,1$  m. Las barras de estructura están hechas de acero cuyo módulo de elasticidad  $E = 220$  GPa, cada una con área transversal  $A = 2500$  mm<sup>2</sup>. En el punto  $D$  actúa una carga vertical  $P = 90$  kN. Calcule:

- el desplazamiento horizontal de la articulación  $C$
- la carga máxima admisible  $P_{m\acute{a}x}$  si el valor máximo del desplazamiento en la articulación  $C$  es 2,5 mm



## SOLUCIÓN

Ecuaciones de equilibrio en el punto  $C$  :

$$\sum F_y = 0$$

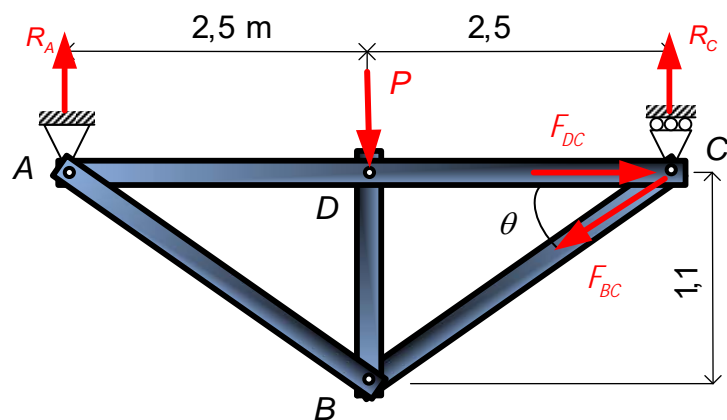
$$\rightarrow R_c = F_{BC} \text{sen}(\theta)$$

$$\rightarrow F_{BC} = \frac{R_c}{\text{sen}(\theta)}$$

$$\sum F_x = 0$$

$$\rightarrow F_{DC} = F_{BC} \cos(\theta) = \frac{R_c}{\text{sen}(\theta)} \cos(\theta)$$

$$= R_c \cot(\theta) = \frac{P L/2}{2 H}$$



El desplazamiento horizontal de la articulación C:

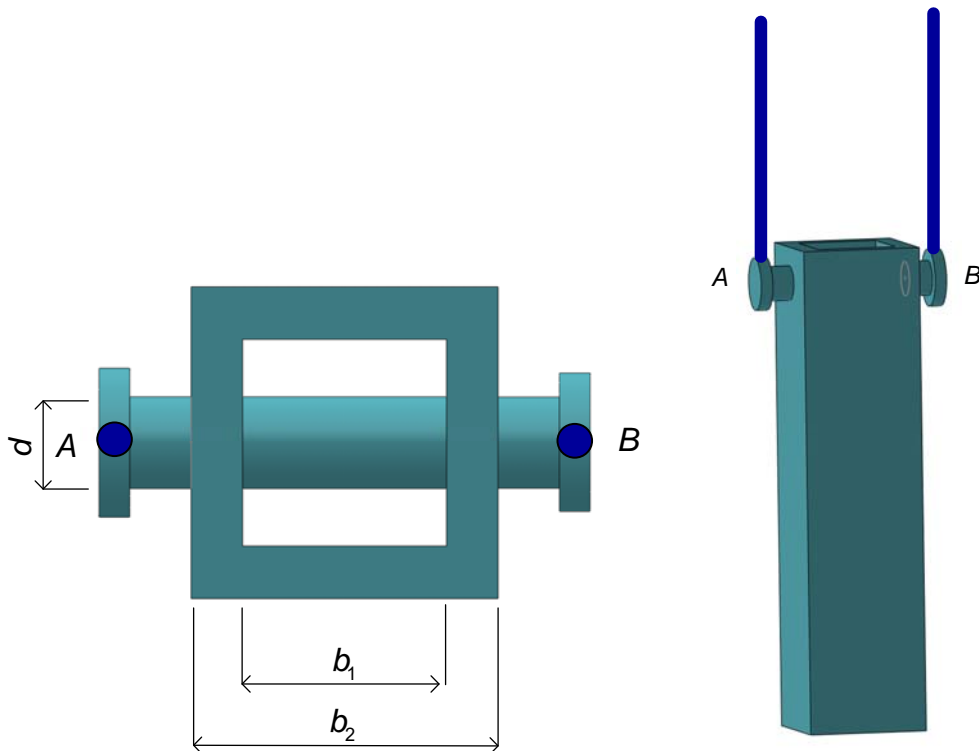
$$\begin{aligned}\delta_c &= \frac{F_{DC}L}{EA} = \frac{P L/2}{H EA} = \frac{P L^2}{4 EAH} \\ &= \frac{90}{4} \frac{5000^2}{(220)(2500)(1100)} = 0,9298 \text{ mm}\end{aligned}$$

La carga máxima admisible  $P_{m\acute{a}x}$ :

$$\begin{aligned}\frac{P}{\delta_c} &= \frac{P_{m\acute{a}x}}{\delta_c^{m\acute{a}x}} \\ \rightarrow P_{m\acute{a}x} &= \frac{P}{\delta_c} \delta_c^{m\acute{a}x} \\ &= \frac{90}{0,9298} 2,5 = 242 \text{ kN}\end{aligned}$$

**PROBLEMA 1.2.4**

Un tubo cuadrangular de acero con peso específico  $\gamma = 88 \text{ kN/m}^3$  y una longitud  $L = 2 \text{ m}$ . El tubo se cuelga con un perno de diámetro  $d$  que está sostenido por dos cables en los puntos  $A$  y  $B$ . La sección transversal es un cuadrado hueco con una dimensión interna  $b_1 = 150 \text{ mm}$  y externa  $b_2 = 300 \text{ mm}$ . La tensión tangencial admisible del perno es de  $40 \text{ MPa}$  y su tensión normal admisible es de  $60 \text{ MPa}$ . Determine el diámetro mínimo del perno con el fin de sostener el peso del tubo.

**SOLUCIÓN**

Área de la sección:  $A = b_2^2 - b_1^2 = 0,3^2 - 0,15^2 = 0,0675 \text{ m}^2$

Peso del tubo:  $W = \gamma A L = 88 \cdot 0,0675 \cdot 2 = 11,88 \text{ kN}$

Cálculo del diámetro a partir de la tensión tangencial admisible:

$$\tau_{ad} (2 A_{\text{perno}}) = \tau_{ad} \left( 2 \frac{\pi}{4} d^2 \right) = W$$

$$\rightarrow 40000 \cdot \left( 2 \cdot \frac{\pi}{4} \cdot d^2 \right) = 11,88$$

